Ficha de Exercícios Nº 02

MATRIZES E DETERMINANTES

Curso: Engenharias — **Nível**: I
Disciplina: Álgebra Linear e Geometria Analítica — **Semestre**: 1º/2024
Docentes: Grupo de disciplina — **Carga Horária**: 6h/Semanal
Duração: Três (3) semanas (04-Mar a 23-Mar-2024)

1. Seja:

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix} 3 & 8 & -2 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 9 & 3 & 7 & 3 \\ 12 & 1 & -7 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Qual é a ordem de ***M***?
b) Escreva os elementos da segunda linha.
c) Escreva os elementos da quarta coluna.
d) Escreva o elemento $(3,4)$, o elemento $(1,4)$, e o elemento $(3,1)$.

2. a) Quantos elementos há numa matriz 1×1?
b) Quantos elementos há numa matriz 3×5?
c) Quantos elementos há numa matriz $\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}$?
d) Quantos elementos há numa matriz $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r}$?

3. Sendo as matrizes $A=\begin{pmatrix} x+y & m-n \\ x-2y & 3m+n \end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ -1 & 10 \end{pmatrix}$, achar os valores de *x*, *y*, *m* e *n* para que se tenha $A=B$.

4. Escreva a matriz cujos elementos são a soma dos elementos correspondentes das matrizes *A* e *B*, onde: $A=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ e $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Sejam: $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ e $D=\begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}$. Encontre, se possível:

a) $A+B$
b) $A-C$
c) $B-C$
d) $-2D$
e) $A\cdot C$
f) $C\cdot A$
g) $D\cdot B$
h) $B\cdot A$

6. Sejam $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $C=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.
Determine as matrizes: (a) AB (b) BA (c) $A(BC)$ (d) $(AB)C$

7. Sendo as matrizes $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 12 & -1 \end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix} x-y & x+y \\ 2y-5 & -1 \end{pmatrix}$, calcule x e y de modo que $A=B^t$.

8. Sejam as matrizes $A=\begin{pmatrix} x+y & 4 & -2 \\ 3 & 2z & 3 \\ 0 & 4 & x-y \\ -6 & z-t & 1 \end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ -6 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. Se $A^t = B^t$, determine *x, y, z e t.*

9. Seja $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$. Determine os valores de a, b, c e d.

10. Dadas as matrizes: $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ e $X=\begin{pmatrix} 6 & 5 & 7 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$.

    Mostre que $AX = BX$, embora $A \neq B$.

11. Verifique que: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

12. Dadas matrizes:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Mostre que $AB = AC$.

13. Calcule:

    a) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

    b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

    c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 7 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

14. Determine quais das seguintes matrizes são simétricas, explique porquê:

    a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

    b) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 1 & 5 & 5 \\ 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

    c) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

    d) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

    e) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 3 & 2 & -5 \\ -7 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

15. Escreva a matriz $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a_{ij}})_{2\times 3}$ tal que $\boldsymbol{a_{ij}}=3\boldsymbol{i}^2+2\boldsymbol{j}$.
16. Se $\boldsymbol{A}$ é uma matriz triangular superior, qual é a transposta de $\boldsymbol{A}$?
17. Se $\boldsymbol{A}$ é uma matriz triangular inferior, qual é a transposta de $\boldsymbol{A}$?
18. Determine o número $b\in R$, para que a matriz $A=\begin{pmatrix}3 & 2b\\ b^2 & b\end{pmatrix}$, seja simétrica.
19. Seja a matriz $A=\left[a_{ij}\right]_{4x4}$, para a qual $\begin{cases}a_{ii}=0\\ a_{ij}=a_{ji}\\ a_{ij}=i+j, \quad se \quad 1\le i<j\le 4\end{cases}$.

    Determine A e At. A é simétrica?
20. Sejam $A=[a_{ij}]$ e $B=[b_{ij}]$ duas matrizes de ordem 3 tais que $a_{ij}=\begin{cases}i+j, i=j\\ i-j, i\neq j\end{cases}$ e $B=3j-2i$.

    Calcule, se possível: A^2-3B
21. Seja a matriz A, quadrada de ordem n. Demonstre que $A+A^t$ é simétrica.

Determinante e Matriz Inversa

22. Usando a regra de Sarrus, calcule:

    a) $\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 3 & -2\\ 3 & -2 & 1\end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix}3 & 5 & 0\\ -2 & 1 & 6\\ 4 & 2 & -2\end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix}6 & 0 & 4\\ 5 & 3 & 2\\ 6 & 0 & 5\end{vmatrix}$

23. Calcule os seguintes determinantes usando o desenvolvimento da primeira linha.

    a) $\begin{vmatrix}3 & 0 & 4\\ 2 & 3 & 2\\ 0 & 5 & -1\end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix}2 & -4 & 3\\ 3 & 1 & 2\\ 1 & 4 & -1\end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix}2 & 3 & -4\\ 4 & 0 & 5\\ 5 & 1 & 6\end{vmatrix}$

    b) $\begin{vmatrix}0 & 5 & 1\\ 4 & -3 & 0\\ 2 & 4 & 1\end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & 4 & 2\end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix}4 & 3 & 0\\ 6 & 5 & 2\\ 9 & 7 & 3\end{vmatrix}$

24. Dada a matriz $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & 2 & 1\\ 5 & 1 & 3\end{pmatrix}$ Calcule: a) $\boldsymbol{Adj\ A}$; b) $|\boldsymbol{A}|$; c) $\boldsymbol{A}^{-1}$.
25. Dada a matriz $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -3\\ 0 & 2 & 1\\ 5 & 1 & 3\end{pmatrix}$ Calcule: a) $\mathrm{Adj}(A)$ b) $\mathrm{Det}(A)$ c) A^{-1}
26. Em cada caso determinar a inversa da matriz dada e verificar o resultado.

    a) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}7 & 7\\ 3 & -1\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 5 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 7 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \\ -4 & 2 & 8 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ -5 & 3 & -15 \end{pmatrix}$

i) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

j) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

27. Usando o método de Gauss-Jordan, calcule a inversa das matrizes do exercício anterior.

28. Considere as seguintes matrizes reais $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

   a) Calcule a inversa de A pelo método de Gauss – Jordan.

   b) Determine a matriz real X que satisfaz a equação: $AXB^{-1} = I$

29. Reduza as matrizes à forma escada reduzida por linhas:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & 2 & 7 \\ 0 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

30. Reduzir cada matriz seguinte à forma escalonada e depois à sua forma canônica por linhas. Calcule também o posto $\boldsymbol{r(A)}$ de cada uma.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 6 & 2 & -6 & 5 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 4 \\ 4 & -5 & 6 & -5 & 7 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

31. Determine o posto das seguintes matrizes para os diferentes valores do parâmetro λ.

a) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & \lambda & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 7 & 2 \\ 1 & 10 & 17 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$; b) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ \lambda & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & \lambda & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$